微分積分（発展）

*微分方程式

$\dfrac{df(t)}{dt} = k$ の一般解は $f(t) = kt + C$

$\dfrac{d^2 f(t)}{dt^2} = kt$ の一般解は $f(t) = \dfrac{1}{2}kt^2 + C_1 t + C_2$

$\dfrac{df(t)}{dt} = kf(t)$ の一般解は $f(t) = Ce^{kt}$

$\dfrac{d^2 f(t)}{dt^2} = -k^2 f(t)$ の一般解は $f(t) = A\sin kt + B\cos kt$

$\dfrac{d^2 f(t)}{dt^2} + a\dfrac{df(t)}{dt} + bf(t) = 0$ ｛$\left(\dfrac{df(t)}{dt} - \alpha f(t)\right)\left(\dfrac{df(t)}{dt} - \beta f(t)\right) = 0$｝ の一般解は $f(t) = Ae^{\alpha t} + Be^{\beta t}$

*偏微分

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

*全微分

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

$$(= \lim_{\Delta x, \Delta y \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y)}{\Delta x}\Delta x + \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}\Delta y)$$

*重積分

$$\int_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{x_0}^{x_1}\left(\int_{y_0}^{y_1} f(x,y)\,dy\right)dx = \int_{y_0}^{y_1}\left(\int_{x_0}^{x_1} f(x,y)\,dx\right)dy$$

*変数変換とヤコビアン

$f(x,y)$ から $g(u,v)$ への変換

$$\int\int_A f(x,y)\,dx\,dy = \int\int_B |J|\,g(u,v)\,du\,dv$$

微分積分（発展）

$$dx=\frac{\partial x}{\partial u}du+\frac{\partial x}{\partial v}dv,\quad dy=\frac{\partial y}{\partial u}du+\frac{\partial y}{\partial v}dv,\ \text{つまり}\ \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} du \\ dv \end{bmatrix}$$

ヤコビアン $J=\dfrac{\partial(x,y)}{d(u,v)}dudv=\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}=\dfrac{\partial x}{\partial u}\dfrac{\partial y}{\partial v}-\dfrac{\partial x}{\partial v}\dfrac{\partial y}{\partial u}$

<u>*極座標とデカルト座標との変換</u>

$(x,y)\to(r,\theta)$ の変換において、 $\begin{matrix} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{matrix}$

$$J=\frac{\partial(x,y)}{d(r,\theta)}=\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix}=r(\cos^2\theta+\sin^2\theta)=r$$

$$dxdy=\frac{\partial(x,y)}{d(r,\theta)}drd\theta=rdrd\theta$$

球座標 $\begin{pmatrix} x=r\sin\theta\cos\phi \\ y=r\sin\theta\sin\phi \\ z=r\cos\theta \end{pmatrix}$ への変換

$$J=\frac{\partial(x,y,z)}{d(r,\theta,\phi)}=\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \phi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \phi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \phi} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \sin\theta\cos\phi & r\cos\theta\cos\phi & -r\sin\theta\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi & r\cos\theta\sin\phi & r\sin\theta\cos\phi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{vmatrix}$$

$$=r^2\sin^3\theta\sin^2\phi+r^2\sin\theta\cos^2\theta\cos^2\phi-(-r^2\sin\theta\cos^2\theta\sin^2\phi)-(-r^2\sin^3\theta\cos^2\phi)$$

$$=r^2\sin^3\theta+r^2\sin\theta\cos^2\theta=r^2\sin\theta$$

$$dxdydz=\frac{\partial(x,y,z)}{d(r,\theta,\phi)}drd\theta d\phi=r^2\sin\theta drd\theta d\phi$$

<u>*ガウス積分</u>

微分積分（発展）

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$$

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy = \int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} e^{-r^2} r\,dr d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\infty} re^{-r^2}\,dr = \pi\right)$$

面積分、線積分

線素　$ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$

曲線の長さ　$\int_a^b ds = \int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = \int_{t(a)}^{t(b)} \frac{ds}{dt}\,dt = \int_{t(a)}^{t(b)} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$

線積分（平面 f(x,y)を、直線 y=g(x)に沿って積分）

$$\int_C f(x,y)\,ds = \int_a^b f(x,y)\,ds,\quad ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dg(x)}{dt}\right)^2}\,dt = \sqrt{1+\left(\frac{dg(x)}{dx}\right)^2}\,dx$$

線積分（曲線上でのベクトル場の積分）

$$\int_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{A}\cdot\mathbf{t}\,ds = \int_C A_t\,ds$$

(曲面 C 上におけるベクトル場 **A** の接線成分 A_t、位置ベクトル **r**)

ストークスの定理　$\iint_S rot\mathbf{f}\cdot\mathbf{n}\,dS = \oint_C \mathbf{f}\cdot d\mathbf{r}$

($\oint_C$　：閉曲面の周回接線線積分、$d\mathbf{r}$：曲面 C 上の微小な接線ベクトル)

面積分（曲面上でのベクトル場の積分）

$$\int_S \mathbf{E}\cdot\mathbf{n}\,dS = \int_S E_n\,dS$$

(曲面 S 上の微小面積 dS、ベクトル場 **E** の内部から外部に向かう法線ベクトル **n**、**E** の法線成分 En)

ガウスの発散定理　$\iiint_V div\mathbf{f}\,dV = \iint_S \mathbf{f}\cdot\mathbf{n}\,dS$

(ベクトル場 **f** の中にある閉曲面 S（領域 V）)