**特殊関数

ガンマ関数

$$\Gamma(x)=\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt=(x-1)\Gamma(x-1)=(x-1)!\Gamma(1)=(x-1)!$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}\quad(\text{ガウス積分より})$$

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(=\frac{1}{2}!\right)$$

ベータ関数

$$B(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt$$

$$B(x,y)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2x-1}\theta\cos^{2y-1}\theta\,d\theta$$

$$B(x,y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(X+Y)}$$

デルタ関数

$$\delta(x)=\infty\ (x=0),\quad \delta(x)=0\ (x\neq 0),\quad \int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)dx=1$$

sinc 関数（サンプリング関数）

$$\sin c(x)=\frac{\sin x}{x}$$

$$\sin c(0)=1,\quad \sin c(\pm n\pi)=0\quad (n\neq 0),\quad \lim_{x\to\pm\infty}\sin c(x)=0$$

双曲線関数

$$\cosh\theta=\frac{e^{\theta}+e^{-\theta}}{2}\quad \sinh\theta=\frac{e^{\theta}-e^{-\theta}}{2}$$

$$\cosh^2\theta-\sinh^2\theta=1$$

$$(\sinh\theta)'=\cosh\theta$$

$$(\cosh\theta)'=\sinh\theta$$

$$(\tanh\theta)'=\frac{1}{\cosh^2\theta}$$

リーマンゼータ関数とオイラー積

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}=\frac{1}{1^s}+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\cdots=\prod_{p}\frac{1}{1-\frac{1}{p^s}}=\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2^s}\right)\left(1-\frac{1}{3^s}\right)\left(1-\frac{1}{5^s}\right)\left(1-\frac{1}{7^s}\right)\cdots}$$ （p は素数）

$$\zeta(0)=-\frac{1}{2},\ \zeta(2)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}\ (\text{バーゼル問題}),\ \zeta(4)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}$$