ベクトル

ベクトルの基礎

内積　$\mathbf{a}\bullet\mathbf{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+\cdots+a_nb_n=\sum_{i=1}^{n}a_ib_i$

$$\mathbf{a}\bullet\mathbf{b}=|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\theta$$

$$|\mathbf{a}|^2=\mathbf{a}\bullet\mathbf{a}=a_1^2+a_2^2+a_3^2$$

$$\cos\theta=\frac{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|}{\mathbf{a}\bullet\mathbf{b}}=\frac{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}$$

（コーシー・シュワルツの不等式$a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3\le\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}$）

$$\mathbf{a}\bullet\mathbf{b}=\mathbf{b}\bullet\mathbf{a}$$

$$(\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2)\bullet\mathbf{b}=\mathbf{a}_1\bullet\mathbf{b}+\mathbf{a}_2\bullet\mathbf{b}$$

$$\mathbf{a}\bullet(\mathbf{b}_1+\mathbf{b}_2)=\mathbf{a}\bullet\mathbf{b}_1+\mathbf{a}\bullet\mathbf{b}_2$$

基底ベクトル　$\mathbf{e}$

$\mathbf{e}_1\bullet\mathbf{e}_1=\mathbf{e}_2\bullet\mathbf{e}_2=\mathbf{e}_3\bullet\mathbf{e}_3=1$，$\mathbf{e}_1\bullet\mathbf{e}_2=\mathbf{e}_2\bullet\mathbf{e}_3=\mathbf{e}_3\bullet\mathbf{e}_1=0$

（正規直交基底：クロネッガーのデルタ$\delta_{mn}$、$m=n$のとき 1, $m\neq n$のとき 0）

*ベクトルの外積

$$|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|=|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\theta=\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}=a_xb_y-a_yb_x$$

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=-\mathbf{b}\times\mathbf{a}$$

$$\mathbf{a}\bullet(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=\mathbf{b}\bullet(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=0$$

*三重積（スカラー三重積）

$\mathbf{a}\bullet(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\bullet\mathbf{c}=V$　（平行六面体の体積）

**逆格子ベクトル

$\mathbf{a}'=\frac{\mathbf{b}\times\mathbf{c}}{V}$，$\mathbf{b}'=\frac{\mathbf{c}\times\mathbf{a}}{V}$，$\mathbf{c}'=\frac{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}{V}$

$$\mathbf{a}'\bullet\mathbf{a}=\mathbf{b}'\bullet\mathbf{b}=\mathbf{c}'\bullet\mathbf{c}=1$$

$$\mathbf{a}'\bullet\mathbf{b}=\mathbf{a}'\bullet\mathbf{c}=\mathbf{b}'\bullet\mathbf{c}=\mathbf{b}'\bullet\mathbf{a}=\mathbf{c}'\bullet\mathbf{a}=\mathbf{c}'\bullet\mathbf{b}=0$$

$\mathbf{a}=V\mathbf{b}'\times\mathbf{c}'$，$\mathbf{b}=V\mathbf{c}'\times\mathbf{a}'$，$\mathbf{c}=V\mathbf{a}'\times\mathbf{b}'$

$$\mathbf{a}'\bullet(\mathbf{b}'\times\mathbf{c}')=(\mathbf{a}'\times\mathbf{b}')\bullet\mathbf{c}'=\frac{1}{V}$$

*ベクトル解析

$$\nabla U = gradU = \left[\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}\right] = \left[U_x, U_y, U_z\right]$$ (スカラー場 $U$ に対する勾配ベクトル)

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = div\mathbf{U} = \frac{\partial \mathbf{U}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{U}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{U}_z}{\partial z}$$ (ベクトル場 $\mathbf{U}$ の発散)

$$\nabla \times \mathbf{U} = rot\mathbf{U} = \left[\frac{\partial \mathbf{U}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathbf{U}_y}{\partial z}, \frac{\partial \mathbf{U}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathbf{U}_z}{\partial x}, \frac{\partial \mathbf{U}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathbf{U}_x}{\partial y}\right]$$ (ベクトル場 U の回転)

$$\nabla = \left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right]$$ (ナブラ、ハミルトン演算子)

$$\Delta = \nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$ (ラプラシアン、ラプラス演算子)

$$div(gradU) = \nabla \cdot (\nabla U) = \left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right] \cdot \left[\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}\right] = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \Delta U$$