線形代数

行列

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \\ t & u \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ap+br+ct & aq+bs+cu \\ dp+er+ft & dq+es+fu \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \\ t & u \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} pa+qd & pb+qe & pc+qf \\ ra+sd & rb+se & rb+se \\ ta+ud & tb+ue & tc+uf \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}=ap+bq+cr$$ （内積）

$A+B=B+A$

$r(A+B)=rA+rB$

$AB\neq BA$

$(AB)C=A(BC)$

$A(B+C)=AB+AC \quad (A+B)C=AC+BC$

単位行列と零行列　$E=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$　$E=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$　$O=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$AE=EA=A$，$E^n=E$

$A+O=O+A=A$，$AO=OA=O$

行列式　$A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$の行列式$\Delta=\det A=|A|=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$$ （サラスの方法）

$|A|=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=|{}^tA|=\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}=ad-bc$ （${}^tA$：転置行列）

逆行列

$AA^{-1}=A^{-1}A=E$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} d & -a \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -a \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$A^2 - (a+d)A + (ad-bc)E = O$ (ケーリー・ハミルトンの定理)

回転行列

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$R(\theta)^{-1} = R(-\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$R(\theta)^n = R(n\theta)$$

$P^{-1}AP$ 型の n 乗計算

$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$ のとき $P^{-1}A^nP = \begin{bmatrix} a^n & 0 \\ 0 & b^n \end{bmatrix}$

**固有値、固有ベクトル、対角化

$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ (正方行列 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$、固有ベクトル $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$、固有値 λ)

$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = (a-\lambda)(d-\lambda) - bc = \lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc = 0$ (固有方程式)

$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$ (λ_1, λ_2 は固有方程式の解、2x2 で重解の場合は対角化できず)

*対称行列、直交行列

対称行列 $A^T = A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$

直交行列： $A^TA = E$ つまり $A^T = A^{-1}$ となるような行列、例えば $R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$

**エルミート行列、ユニタリ行列

行列 A のエルミート共役 $A^\dagger = {}^t(A^*)$ （各要素の複素共役をとったものの転置行列）

$$(A^\dagger)^\dagger = A$$

エルミート行列： $A^\dagger = A$ を満たす正方行列

ユニタリ行列：$U^\dagger = U^{-1}$ となるような行列

**三重積（スカラー三重積）

$$\mathbf{a} \bullet (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

*クラメールの公式

方程式$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$の解は

$$x = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$